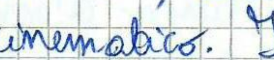
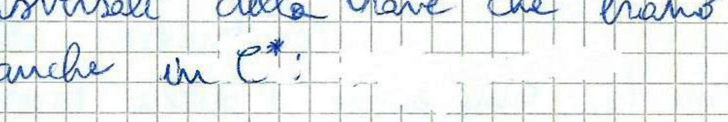
Il problema elastico della trave piana rettilinea

Per i sistemi di travi isostatici possiamo calcolare le reazioni vincolari nell'ipotesi di corpi rigidi. Si ottengono quindi le caratteristiche di sollecitazione.
Il problema strutturale riguarda però anche la rigidezza e la resistenza, non solo l'equilibrio. Per poter trattare tali due aspetti bisogna quindi togliere l'ipotesi di corpo rigido (con la quale abbiamo studiato l'equilibrio)!
In un secondo momento ci occuperemo della geometria (forma e dimensione) della sezione trasversale. Per ora ci limitiamo, trascurando anche il tipo di materiale da cui sono composte le travi, a considerare le travi deformabili dal punto di vista cinematico. Ipotizziamo piccoli spostamenti e piccole rotazioni!

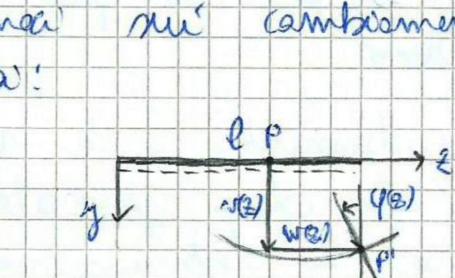

C C = configurazione iniziale di riferimento


C^* C^* = configurazione finale variata

Per il corpo rigido C^* è nota se conosco u_0, v_0 e θ. Se invece la trave è deformabile bisogna conoscere la situazione punto per punto. Introduciamo allora un modello cinematico per la trave piana rettilinea, quello della conservazione delle sezioni piane. Esso suppone che le sezioni trasversali della trave che erano piane in C rimangano piane anche in C^*:

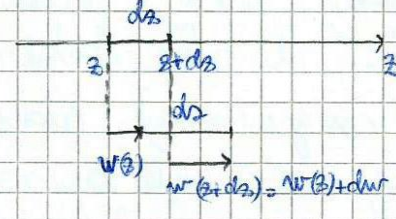


Consideriamo ora una trave che subisce una deformazione e concentriamoci sui cambiamenti a cui è soggetto uno dei suoi punti:



La conoscenza di C^* consiste nella determinazione dello spostamento di tutti i punti dell'asse della trave e della rotazione di tutdiversi punti della trave. Si annullano quindi in un moto rigido. Ecco come li definiamo:

- deformazione assiale:

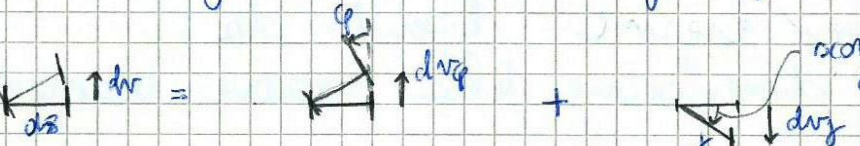


dz è la lunghezza iniziale indeformata, ds è quella finale deformata. Definiamo:

$$\varepsilon = \frac{ds - dz}{dz} = \frac{dz + dw - dz}{dz} = \frac{dw}{dz}$$

ε è adimensionale, per $\varepsilon > 0$ si ha allungamento, per $\varepsilon < 0$ si ha accorciamento;

- deformazione a taglio (scorrimento angolare):



Def Eulero-Bernoulli   Def. di puro taglio

Pertanto il moto complessivo è il risultato di due spostamenti elementari. Considerando che per φ e $\gamma \to 0 \Rightarrow tg\varphi = \varphi$ e $tg\gamma = \gamma$:

$$dv = dv_\varphi + dv_\gamma = -dz\, tg\varphi + dz\, tg\gamma \simeq -dz\varphi + dz\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dz} = \frac{-dz\varphi + dz\gamma}{dz} = \gamma - \varphi \Rightarrow \gamma = \frac{dv}{dz} + \varphi$$

γ è adimensionale. Nel caso di Eulero-Bernoulli si ha $\gamma = 0$, quindi $\frac{dv}{dz} + \varphi = 0$.

- curvatura flessionale:

$$\chi = \frac{\varphi + d\varphi - \varphi}{dz} = \frac{d\varphi}{dz}$$

Ma al contempo $dz = R d\varphi$, quindi:

$$R = \frac{dz}{d\varphi} \Rightarrow R = \frac{1}{\chi}$$

Allora χ è l'inverso del raggio di curvatura R e ha dimensioni $[L^{-1}]$.

Riassumendo le tre equazioni di congruenza, che legano gli spostamenti alle caratteristiche di deformazione, sono:

- $\varepsilon = \frac{dw}{dz}$;
- $\gamma = \frac{dv}{dz} + \varphi$ (EB : $\gamma = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dz} + \varphi = 0$);
- $\chi = \frac{d\varphi}{dz}$.

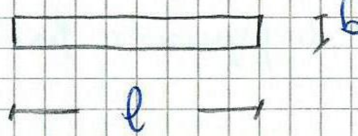
te le sue sezioni. In particolare ogni punto è soggetto a:

- $w(z)$: spostamento in direzione assiale z, maggiore di zero se concorde con z;
- $v(z)$: spostamento in direzione trasversale y, maggiore di zero se concorde con y;
- $\varphi(z)$: rotazione della sezione maggiore di zero se antioraria.

Esistono due casi limite di deformazione:

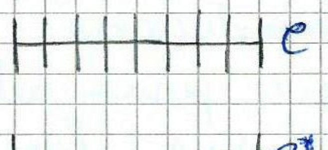
- trave di Eulero Bernoulli (o trave indeformabile a taglio):

Le sezioni trasversali si mantengono $\perp$ alla linea d'asse deformata. Tale ipotesi è realistica per travi snelle; se b è la dimensione caratteristica delle sezioni trasversali e l la lunghezza della trave, essa è snella se $l \gg b$:



$l > 10b$

- deformazione di puro taglio:



Le sezioni trasversali non ruotano. È un'ipotesi realistica per travi tozze, cioè se b dimensione caratteristica della sezione è confrontabile con la lunghezza l della trave.

In realtà il comportamento è intermedio tra i due estremi. Quanto più la trave è snella, tanto più si avvicina al modello di Eulero-Bernoulli (EB), quanto più è tozza tanto più le sezioni non ruotano.

Le equazioni di congruenza

Anche conoscendo w, v e φ $\forall P \in C^*$ non abbiamo un'idea generale della deformazione. Ci servono misure di deformazione relative, dipendenti cioè dagli spostamenti relativi di

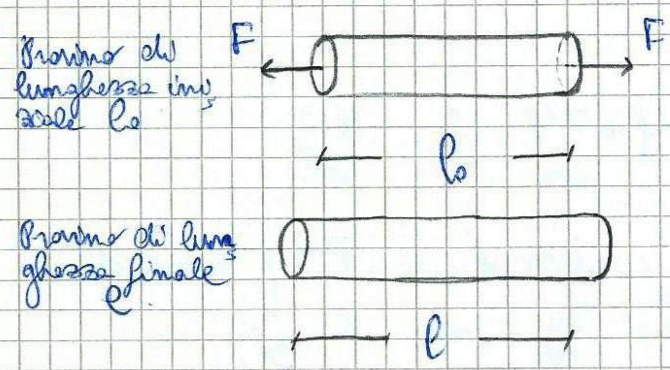
Le equazioni di legame elastico lineare

Dal punto di vista statico (equilibrio) abbiamo le equazioni indefinite di equilibrio (indefinite perché valgono solo localmente, non globalmente). Esse legano i carichi p, q, m alle caratteristiche di sollecitazione N, T, M.
Dal punto di vista cinematico (congruenza) abbiamo le equazioni di congruenza, che legano gli spostamenti w, v, φ alle misure di deformazione relativa $\varepsilon, \gamma, \chi$.
Ora vogliamo completare l'opera legando le sollecitazioni N, T, M alle deformazioni $\varepsilon, \gamma, \chi$.

Quest'ultimo legame dipende da:
- forma e dimensione della sezione trasversale della trave;
- materiale che costituisce la trave.

Ipotizziamo che il materiale sia elastico lineare. In tal modo abbiamo la più semplice forma matematica, che è pure realistica nella maggior parte delle applicazioni.

-) Consideriamo la prova elementare di trazione semplice per analizzare il comportamento assiale.



F è la forza applicata agli estremi

$$N = F, \quad \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

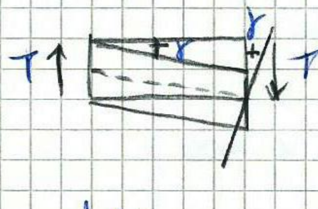
Man mano che F aumenta aumenta pure ε;

$N = k_\varepsilon \cdot \varepsilon$ in cui k_ε è la rigidezza assiale della trave, dipendente anche da materiale e sez trasversale:

$$k_\varepsilon = E \cdot A \quad [F]$$

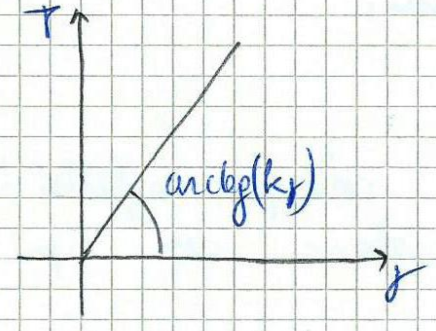
Con E modulo elastico del materiale, $[F/L^2]$ e A area della sezione trasversale, $[L^2]$.

•) Per il comportamento a taglio immaginiamo un'ideale applicazione di puro taglio:



γ è lo scorrimento angolare, cioè quanto la sezione ruota rispetto alla normale alla linea d'asse.

Graficando:

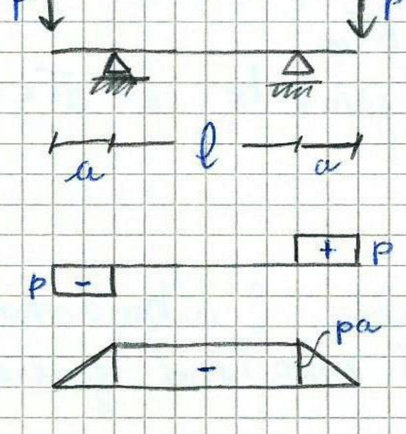


$T = k_\gamma \cdot \gamma$, in cui k_γ è la rigidezza a taglio della trave, dipendente anche da elasticità tangenziale e area di taglio:

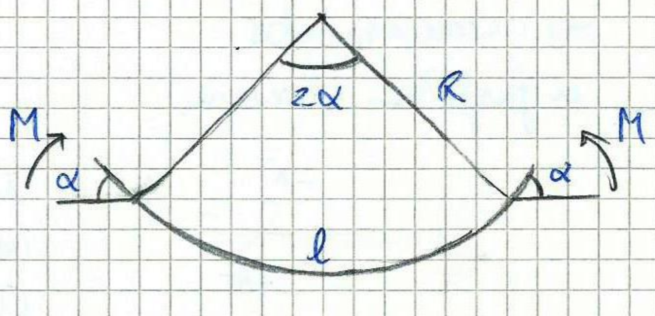
$$k_\gamma = G \cdot K \quad [F]$$

Con G modulo di elasticità tangenziale del materiale, $[F/L^2]$ e K area di taglio, $[L^2]$

•) Per il comportamento a flessione si usa una trave appoggiata con due sbalzi:



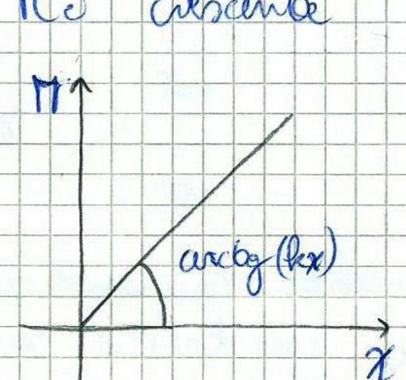
Per semplicità consideriamo il caso opposto, con $M > 0$:



Sperimentalmente si misura α e si ricava χ:

$$\ell = R2\alpha \Rightarrow R = \frac{\ell}{2\alpha} \Rightarrow \chi = \frac{1}{R} = \frac{2\alpha}{\ell}$$

Se M è crescente crescono anche α e χ. Graficamente:



$M = k_\chi \cdot \chi$, in cui k_χ è la rigidezza flessionale della trave, dipendente anche da materiale e momento d'inerzia:

$$k_\chi = E \cdot I$$

Con E modulo elastico del materiale, $[F/L^2]$ e I momento d'inerzia della sezione trasversale della trave, $[L^4]$.

Abbiamo quindi scoperto le tre equazioni di legame elastico lineare per la trave piana rettilinea:

- $N = \boxed{E} \cdot \boxed{A} \cdot \varepsilon$;
- $T = \boxed{G} \cdot \boxed{K} \cdot \gamma$ per la trave EB $\gamma = 0 \Rightarrow GK \to \infty$;
- $M = \boxed{E} \cdot \boxed{I} \cdot \chi$.

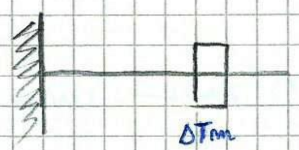
E, G, E: caratteristiche del materiale

A, K, I: forma e dimensione della sezione trasversale della trave

Distorsioni termiche ε_t e χ_t

Le sollecitazioni non si hanno solo per effetto dei carichi, ma anche della temperatura. Esistono due tipi di variazione:

- uniforme:

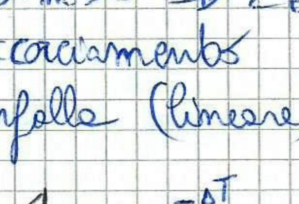


ΔT_m è la variazione termica uniforme di tutti i punti della sezione trasversale, $[T]$. Detto α_t il coefficiente di dilatazione termica del materiale, $[T]^{-1}$, si ha:

$$\varepsilon_t = \alpha_t \cdot \Delta T_m$$

Se $\Delta T_m > 0 \Rightarrow \varepsilon_t > 0 \Rightarrow$ allungamento; se $\Delta T < 0 \Rightarrow \varepsilon_t < 0$ $\Rightarrow$ accorciamento

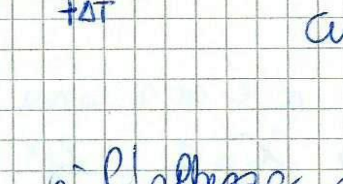
- a farfalla (lineare):



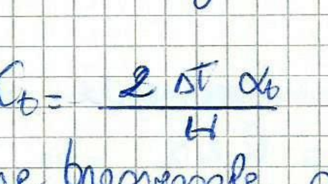
Si riscalda l'intradosso e si raffredda l'estradosso generando un'incurvatura:

$$\chi_t = \frac{2 \Delta T \alpha_t}{H}$$

In cui H è l'altezza della sezione trasversale della trave. Si ha:



$\chi_t > 0$



$\chi_t < 0$

Nel caso isostatico le variazioni termiche causano solo deformazioni e spostamenti, nel caso iperstatico anche sollecitazioni.

In presenza di variazioni termiche le equazioni di legame elastico si ottengono con la sovrapposizione degli effetti:

$$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \varepsilon_t \qquad \gamma = \frac{T}{GK} \qquad \chi = \frac{M}{EI} + \chi_t$$

Il problema elastico

Il problema elastico consiste nel determinare le sollecitazioni N, T, M, le deformazioni $\varepsilon, \gamma, \chi$ e gli spostamenti w, v, φ noti i carichi p, q, m. È governato da:

Eq.ni di equilibrio	Eq.ni di congruenza	Eq.ni di legame
$\frac{dN}{dz} + p = 0$	$\varepsilon = \frac{dw}{dz}$	$\varepsilon = \frac{N}{EA} + \varepsilon_t$
$\frac{dT}{dz} + q = 0$	$\gamma = \frac{dv}{dz} + \varphi$ (=0 per EB)	$\gamma = \frac{T}{GK}$ (=0 per EB)
$\frac{dM}{dz} + m = T$	$\chi = \frac{d\varphi}{dz}$	$\chi = \frac{M}{EI} + \chi_t$

Per i sistemi isostatici si risolvono in successione equilibrio (N, T, M), legame ($\varepsilon, \gamma, \chi$) e congruenza ($w, v, \varphi$).
Per i sistemi iperstatici il problema elastico va risolto complessivamente (considerando equilibrio, legame e congruenza contemporaneamente).

Solo per la trave singola si hanno due problemi disaccoppiati:
- asta elastica: p, N, ε, w (trave elastica caricata assialmente);
- trave inflessa: $q, m, T, M, \gamma, \chi, v, \varphi$ (trave elastica caricata trasversalmente all'asse).

Per i sistemi di travi non vale quanto detto.

Dato che le soluzioni dei problemi (determinazione degli spostamenti) sono date da equazioni differenziali è necessario considerare le condizioni al contorno date dai vincoli:

a) 

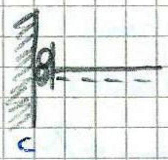
$w_A = 0$
$v_A = 0$
$\varphi_A = 0$

3 cond. cinematiche

b) 

$w_B = 0$
$v_B = 0$
$M_B = 0$

2 cond. cinematiche, 1 statica

c) 

$w_C = 0$
$\varphi_C = 0$
$T_C = 0$

2 cond. cinematiche, 1 statica

d) 

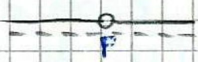
$v_D = 0$
$N_D = 0$
$M_D = 0$

1 cond. cinematica, 2 statiche

e) 

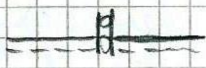
$N_E = 0$
$T_E = 0$
$M_E = 0$

3 condizioni statiche

f) 

$\Delta w_F = 0$
$\Delta v_F = 0$
$M_F = 0$

2 cond cinematiche, 1 statica

g) 

$\Delta w_G = 0$
$\Delta \varphi_G = 0$
$T_G = 0$

2 cond cinematiche, 1 statica